COLLEGE OLYMPE DE GOUGES



# Résultats du devoir de mathématiques n°M4

I.

a. Démontrer que $\sqrt{588} = 14\sqrt{3}$

$\sqrt{588} = \sqrt{14\times14\times3} = \sqrt{14^2\times3} = \sqrt{14^2}\times\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

b. Soit C = $\sqrt{588} - \sqrt{12} - \sqrt{300}$.

C = $14\sqrt{3}-\sqrt{4\times3}-\sqrt{100\times3}$

C = $14\sqrt{3}-\sqrt{4}\times\sqrt{3}-\sqrt{100}\times\sqrt{3}$

C = $14\sqrt{3}-2\sqrt{3}-10\sqrt{3}$

C = $2\sqrt{3}$

II. On pose D = $\sqrt{3^2\times2\times4^2}$ et E = $-\dfrac{\sqrt{20}}{2}$.

D = $\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{4^2}$

D = $3\times\sqrt{2}\times4$

D = $12\sqrt{2}$

E = $-\dfrac{\sqrt{4\times5}}{2}$

E = $-\dfrac{\sqrt{4}\times\sqrt{5}}{2}$

E = $-\dfrac{2\sqrt{5}}{2}$

E = $-\sqrt{5}$

III. Voici deux expressions : $E = 2\sqrt{3}+2$ et $F = 2\sqrt{3}-2$.

a. Calculer $E+F$ ; $E-F$ ; $E^2$ ; $F^2$ ; $E^2-F^2$ ; $E\times F$

$E+F = 2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-2$

$E+F = 4\sqrt{3}$

$E-F = 2\sqrt{3}+2-(2\sqrt{3}-2)$

$E-F = 2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2$

$E-F = 4$

$E^2 = (2\sqrt{3}+2)^2$

$E^2 = (2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}+2)$

$E^2 = 2\sqrt{3}\times2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\times2 + 2\times2\sqrt{3} + 2\times2$

$E^2 = 4\times3 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4$

$E^2 = 12 + 8\sqrt{3} + 4$

$E^2 = 16 + 8\sqrt{3}$

$F^2 = (2\sqrt{3}-2)^2$

$F^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}-2)$

$F^2 = 2\sqrt{3}\times2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\times2 - 2\times2\sqrt{3} + 2\times2$

$F^2 = 4\times3 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4$

$F^2 = 12 - 8\sqrt{3} + 4$

$F^2 = 16 - 8\sqrt{3}$

$E^2-F^2 = 16 + 8\sqrt{3} - (16-8\sqrt{3})$

$E^2-F^2 = 16 + 8\sqrt{3} - 16 + 8\sqrt{3}$

$E^2-F^2 = 16\sqrt{3}$

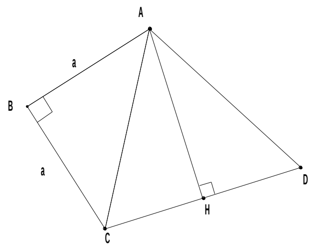
$E \times F = \left(2\sqrt{3}+2\right)\left(2\sqrt{3}-2\right)$
$E \times F = 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3} \ - \ 2\sqrt{3}\times 2 \ + \ 2\times 2\sqrt{3} \ - \ 2 \times 2$
$E \times F = 4 \times 3 \ - \ 4\sqrt{3} \ + \ 4\sqrt{3} \ - \ 4$
$E \times F = 12 \ - \ 4$
$E \times F = 8$

b. Montrer que $\dfrac{E}{F} = \dfrac{E^2}{E\times F}$ et en déduire l'écriture demandée de $\dfrac{E}{F}$.

$\dfrac{E^2}{E\times F} = \dfrac{E\times E}{E\times F} = \dfrac{E}{F}$ (après simplification par E)

Donc $\dfrac{E}{F} = \dfrac{E^2}{E\times F} = \dfrac{16+8\sqrt{3}}{8} = \dfrac{8\times\left(2+\sqrt{3}\right)}{8} = 2+\sqrt{3}$

IV. ABC un triangle rectangle isocèle. ACD un triangle équilatéral. H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ACD. On pose AB = a.




1. Calculer AC en fonction de a.
   Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de pythagore, on a : $AC^2=AB^2+BC^2$
   $AC^2=a^2+a^2$
   $AC^2=2a^2$
   D'où $AC=\sqrt{2}a$ car AC ⩾ 0

2. Calculer AH en fonction de a.
   La hauteur d'un triangle équilatéral est aussi une médiane, donc (AH) coupe [CD] en son milieu et donc H est le milieu de [CD] et CH = $\dfrac{CD}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$
   Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de pythagore, on a
   $AH^2+CH^2=AC^2$
   $AH^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=2\mathrm{a}^2$
   $AH^2+\dfrac{2\mathrm{a}^2}{4}=2\mathrm{a}^2$
   $AH^2=2\mathrm{a}^2-\dfrac{2\mathrm{a}^2}{4}$
   $AH^2=\dfrac{8\mathrm{a}^2}{4}-\dfrac{2\mathrm{a}^2}{4}$
   $AH^2=\dfrac{6\mathrm{a}^2}{4}$
   $AH^2\equiv\dfrac{3\mathrm{a}^2}{2}$ d'où AH = $\sqrt{\dfrac{3}{2}}a$ car AH ⩾ 0

3. Calculer l'aire $A'$ du triangle ABC en fonction de a : $A'=\dfrac{AB\times BC}{2}=\dfrac{a\times a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

4. Calculer l'aire $A''$ du triangle ACD en fonction de a
   $$A''=\frac{CD\times AH}{2}=\frac{\sqrt{2}a\times\sqrt{\frac{3}{2}}a}{2}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times a^2}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

5. Montrer que $\dfrac{A''}{A'}=\sqrt{3}$ : $\dfrac{A''}{A'}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}\times\dfrac{2}{a^2}=\sqrt{3}$