COLLEGE OLYMPE DE GOUGES

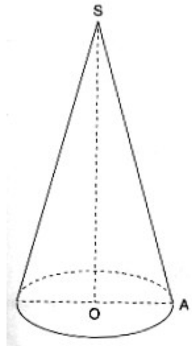
Date.................... Classe..........

Solution du devoir de mathématiques

I] Le cône de révolution ci-contre de sommet S a une hauteur SO de 9 cm et un rayon de base OA de 5 cm.

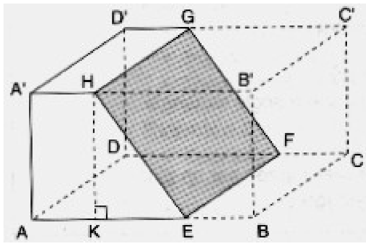
1) $V_1 = \frac{\pi \times OA^2 \times SO}{3} = \frac{\pi \times 25 \times 9}{3} = 75\,\pi$

V_1= 236 cm^3 arrondi au cm^3.



2) Soit M le point du segment [SO] tel que : SM = 3cm.
Le petit cône est une réduction du cône initial, le rapport de la réduction est $k = \frac{SM}{SO} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
On sait que les volumes sont alors multipliés par k^3, donc
$V_2 = k^3 \times V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 75\pi = \frac{25}{9}\pi$
V_2=9 cm^3 arrondi au cm^3 près.

II] Le parallélépipède rectangle de la figure ci-contre a été coupé par un plan parallèle à l'arête [BC].
On donne : EF = 25 cm, HK = 20 cm, KE = 15 cm.

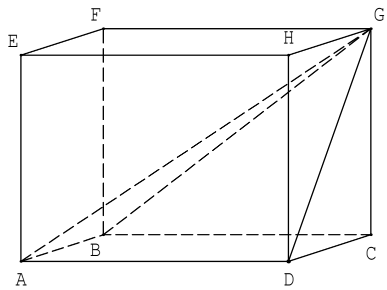


1) D'après le cours, la section plane EFGH est un rectangle.

2) D'après le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle HKE rectangle en K :
$HK^2 + KE^2 = HE^2$
$20^2 + 15^2 = HE^2$
$625 = HE^2$
et donc HE = $\sqrt{625}$ = 25 cm (car HE ⩾ 0).

3) D'après les questions précédentes, le quadrilatère EFGH est un rectangle avec 2 côtés consécutifs de même longueur (HE = EF = 25 cm), on en déduit que c'est un carré.

III] ABCDEFGH est un pavé droit à base carrée.
On donne AD = 3 cm, CG = 4 cm.



1) Calculer le volume en cm^3 de la pyramide de sommet G et de base ABCD.
V = $\frac{aire\,de\,la\,base \times hauteur}{3} = \frac{3 \times 3 \times 4}{3} = 12$
V = 12 cm^3.

2) Calculer DG.
Dans le triangle DCG, rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :
$DC^2 + CG^2 = DG^2$
$3^2 + 4^2 = DG^2$
$25 = DG^2$
et donc $DG = \sqrt{25}$ =5 cm (car $DG \geqslant 0$)

3) On admet que le triangle AGD est rectangle en D.
Calculer la valeur exacte de la longueur AG, puis en donner la valeur arrondie au millimètre.

Dans le triangle AGD, rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a:

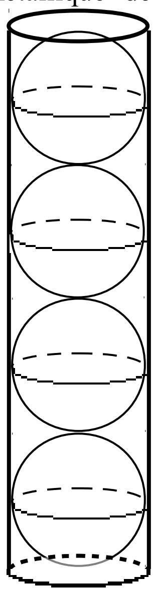
$AG^2 = AD^2 + DG^2$

$AG^2 = 3^2 + 5^2$

$AG = \sqrt{34}$ car $AG \geqslant 0$

AG $\approx$ 5,8cm arrondi au mm.

IV] Quatre balles, absolument identiques, sont enfermées dans une boîte métallique de forme cylindrique.



A l'intérieur de la boîte :

- les balles sont tangentes aux parois ;
- les balles sont tangentes entre elles ;
- la dernière balle est tangente au fond ;
- la première est tangente à l'intérieur du couvercle.

Chaque balle sphérique possède un rayon égal à 3 cm.

1) Soit h la hauteur et d le diamètre de la base de la boite cylindrique
   On a : $h=3 \times 2 \times 4=24$ cm (On calcule la hauteur d'une balle : rayon $\times$ 2, puis on multiplie par le nombre de balles).
   $d=3 \times 2=6$ cm.

2) Le volume V_1 de la boîte est
   $V_1 = \pi \times rayon^2 \times h$
   $V_1 = \pi \times 3^2 \times 24$
   $V_1 = 216\pi$ cm^3
   La valeur arrondie à 1 mm^3 près est V_1=678,584 cm^3

3)
   a) Le volume V_2 d'une balle est
      $V_2 = \frac{4}{3}\pi \times rayon^3$
      $V_2 = 36\pi$ cm^3
      La valeur arrondie à 1 mm^3 près est V_2= 113,097 cm^3.

   b) Volume occupé par les quatre balles : $36\pi \times 4 = 144\pi$ cm^3.
      La valeur arrondie à 1 mm^3 près est 452,389 cm^3.

4) $\frac{Volume\ des\ balles}{volume\ de\ la\ boite} = \frac{144\pi}{216\pi} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$
   les quatre balles occupent environ 67% de l'espace, et donc moins de 70% de la boîte cylindrique.