Calculs sur les radicaux

I. Racines carrées

A. Définition

Soit $a \geq 0$

$\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a

$$\sqrt{a^2} = a$$

exemples :

radical $\swarrow$ $\sqrt{4} = 2$ $\nwarrow$ radicande

$$\sqrt{1,21} = 1,1 \quad \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

B. Résolution de l'équation $x^2 = a$ ($a \geq 0$)

Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exemples :

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Les solutions sont 3 et -3

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}$$

Les solutions sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$

C. Racine carré positive d'un carré

$$\underline{a \geq 0}, \quad \sqrt{a^2} = a$$

II. Règles de calcul

A. Produit

Soit $a \geq 0, b \geq 0, \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Démonstration :

$a \geq 0$ et $b \geq 0$

• $ab \geq 0$ donc $\sqrt{ab^2} = ab$ (par définition)

• $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$

On a : $\sqrt{ab^2} = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$ or 2 nombres positifs qui ont le même carré sont égaux, on

en déduit : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples :

- Simplifier l'écriture de $\sqrt{28}$
 $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
- Calculer $\sqrt{20} \times \sqrt{5}$
 $\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{20 \times 5} = \sqrt{100} = 10$ ou
 $\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} \times \sqrt{5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5^2} = 2 \times 5 = 10$

B. Quotient

Soit $a \geq 0$, $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration :

$a \geq 0$ et $b > 0$

- $\frac{a}{b} \geq 0$ donc $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ (par définition)
- $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$

2 nombres positifs qui ont le même carré sont égaux, on en déduit : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

- Simplifier $\sqrt{\frac{7}{16}}$ $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$
- Calculer $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Une règle : En général, on ne laisse pas de radical au dénominateur

Exemples :

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$
$$\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{7}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{35}}{5}$$

C. Somme et différence

△ $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
 $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$ et $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$